

## Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist eine Funktion, in der die Variable im Exponent auftaucht:

$$f(x) = a^x \text{ mit } a > 0$$

Beispiele hierfür sind u.a.:

1.  $f(x) = 2^x$

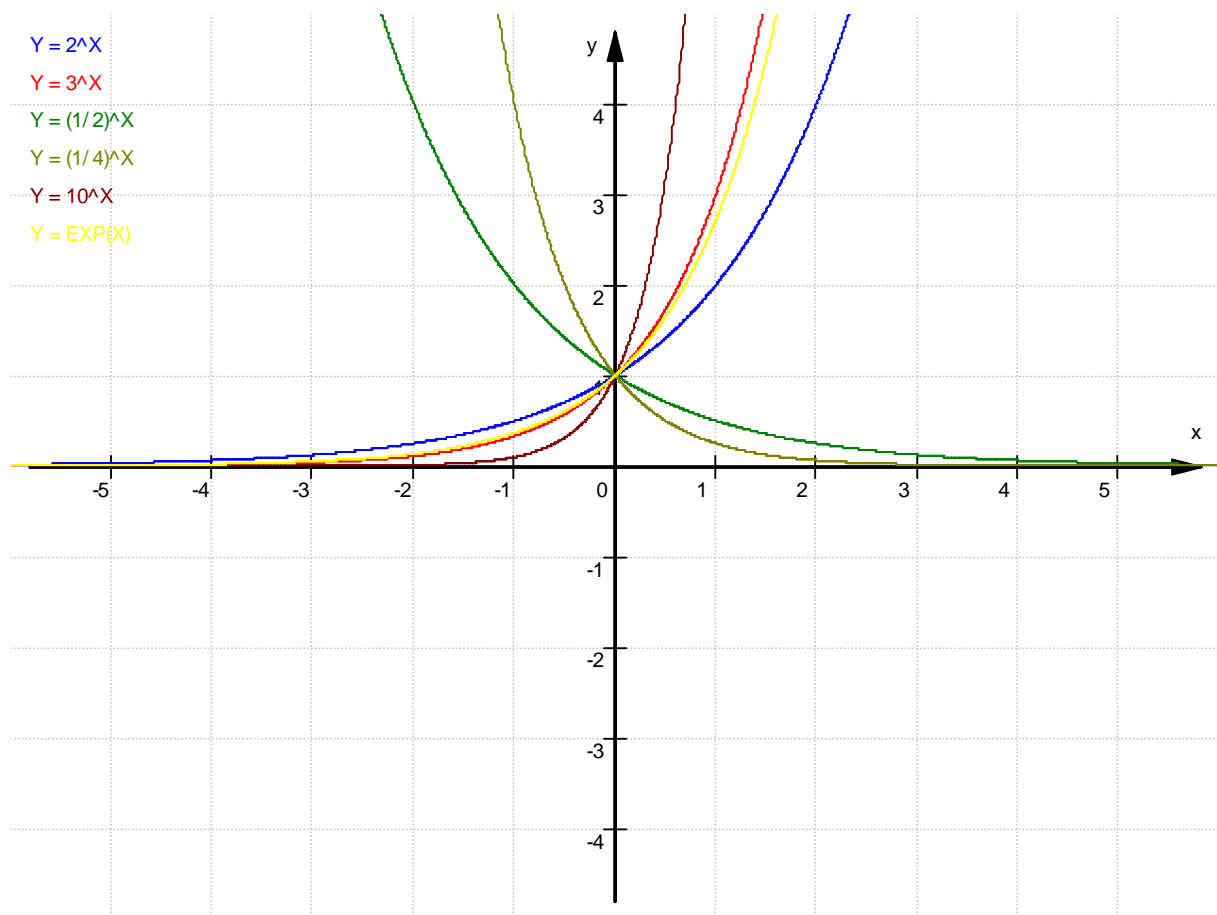
2.  $f(x) = 3^x$

3.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4.  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

5.  $f(x) = 10^x$

6.  $f(x) = e^x$  mit  $e = 2,71828\dots$



Welche Eigenschaften haben diese Funktionen?

Wie verändert sich der Graph, wenn die Basis verändert wird?

Welche Werte können diese Funktionen annehmen und welche nicht?

Haben sie gemeinsame Punkte?

Welchen Einfluss auf den Graphen hat eine Vorzeichenänderung des Exponenten?

1.  $f(x) = 2^x$

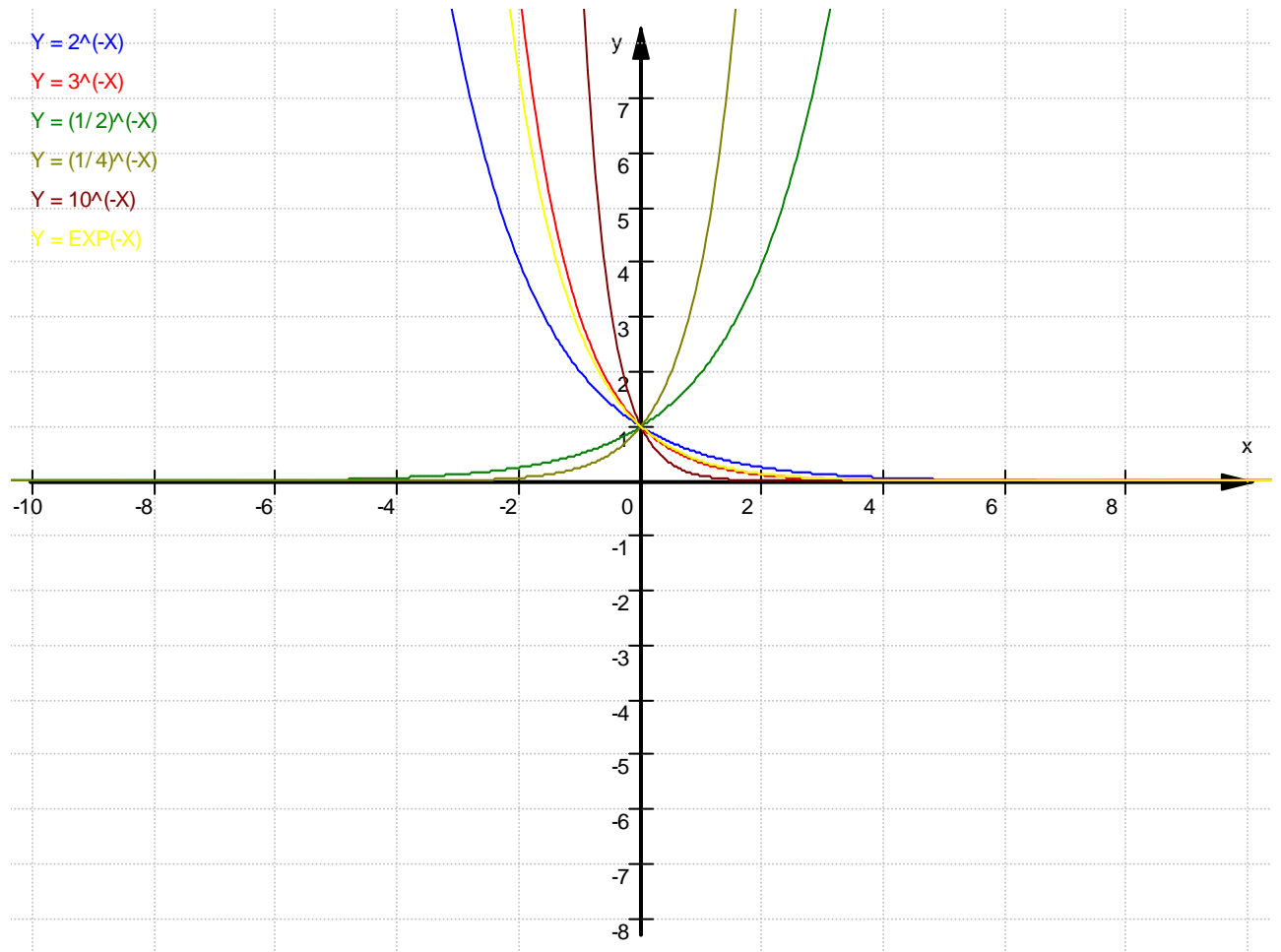
2.  $f(x) = 3^x$

3.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

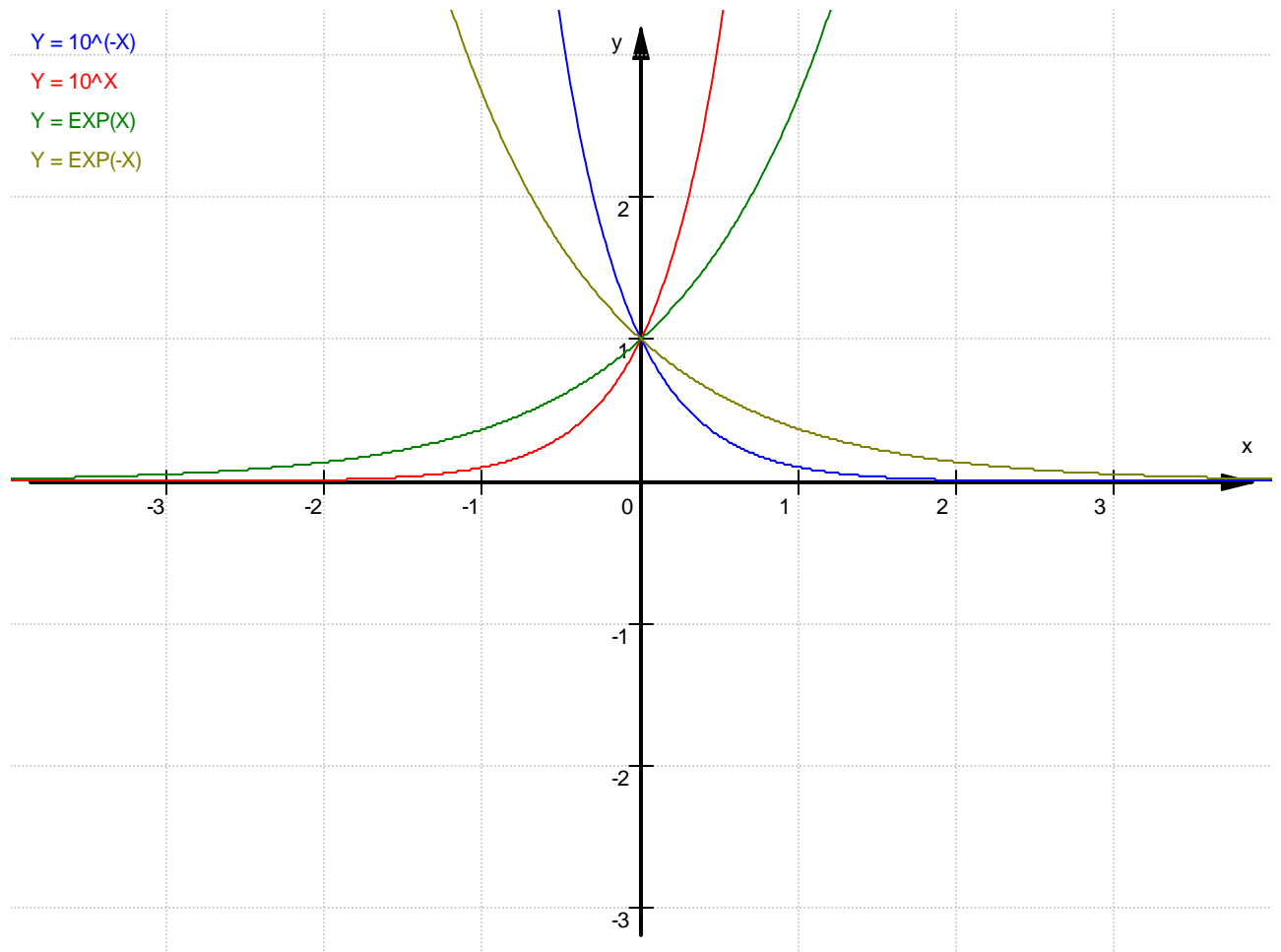
4.  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

5.  $f(x) = 10^x$

6.  $f(x) = e^x$  mit  $e = 2,71828\dots$



## Vergleich der Graphen von $f(x) = b^x$ mit $f(x) = b^{-x}$

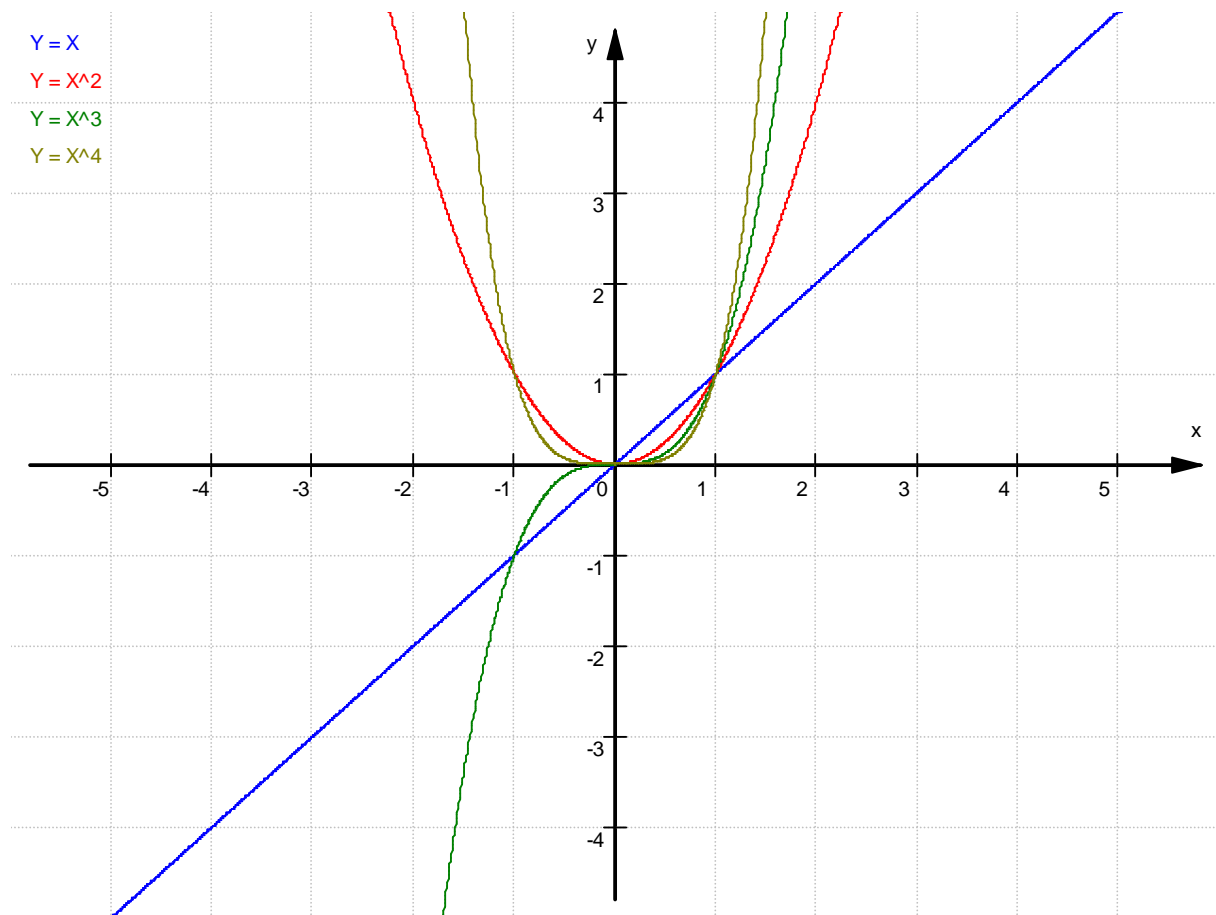


### Zusammenstellung der Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. Der Graph der Funktion  $f(x) = b^x$  mit  $b > 0$  verläuft ganz oberhalb der x-Achse
2. Für  $b > 1$  steigt der Graph mit wachsenden x-Werten an, sie ist stetig, monoton wachsend, die negative x-Achse ist ihre Asymptote. Beispiele hierfür sind u.a.:  
 $f(x) = 2^x$ ;  $f(x) = 10^x$ ; usw.
3. Für  $0 < b < 1$  fällt der Graph mit wachsenden x-Werten, sie ist stetig, monoton fallend, die positive x-Achse ist ihre Asymptote. Beispiele hierfür sind u.a.:  
 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ;  $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ ; usw.
4. Für  $b = 1$  geht der Graph in die Gerade  $f(x) = 1$  über, sie ist stetig, weder steigend noch fallend, sie ist eine Parallele zur x-Achse
5. Die Graphen der Funktionen  $f(x) = b^x$  und  $f(x) = b^{-x}$  liegen symmetrisch zur y-Achse. Man kann sie also durch Spiegelung an der y-Achse ineinander überführen
6. Da  $b^0 = 1$  ist, muss jede Exponentialkurve durch den Punkt  $S(0/1)$  verlaufen, wie es aus den bisherigen Beispielen ablesbar ist.

Die Potenzfunktion ist eine Funktion bei der die Variable zur Potenz erhoben wird, wie z.B.

1.  $f(x) = x^1$  heißt lineare Funktion oder Funktion 1.Grades (Gerade)
2.  $f(x) = x^2$  heißt quadratische Funktion oder Funktion 2.Grades (Parabel)
3.  $f(x) = x^3$  heißt kubische Funktion oder Funktion 3.Grades (kubische Parabel)
4.  $f(x) = x^4$  heißt biquadratische Funktion oder Funktion 4.Grades
5.  $f(x) = x^5$  heißt Potenzfunktion oder Funktion 5.Grades
6.  $f(x) = x^n$  heißt Potenzfunktion bzw. Funktion n-ten Grades



Welche Eigenschaften haben diese Funktionen?

Wie verändert sich der Graph, wenn der Exponent verändert wird?

Welche Werte können diese Funktionen annehmen und welche nicht?

Haben sie gemeinsame Punkte?

## Die Wertetabelle der Exponentialfunktionen und der Potenzfunktionen

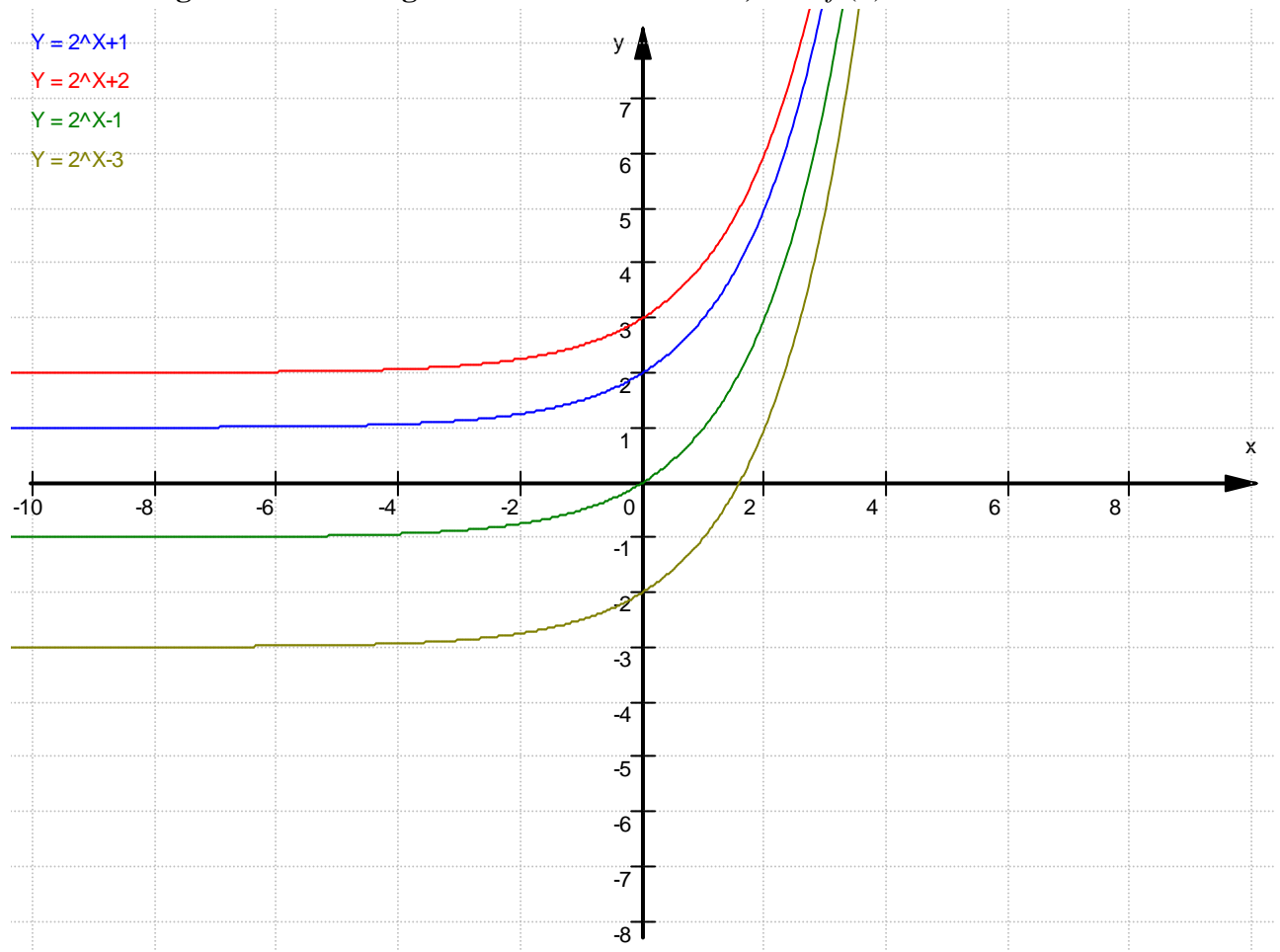
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$f(x) = 3^x$	0,0123	0,037	0,111	0,333	1	3	9	27	81
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	256	64	16	4	1	0,25	0,0625	0,0156	0,0039
$f(x) = 10^x$	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000
$f(x) = e^x$	0,0183	0,0498	0,1353	0,3679	1	2,71828	7,389	20,085	54,598
$f(x) = x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$f(x) = x^3$	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
$f(x) = x^4$	256	81	16	1	0	1	16	81	256

Welche Exponentialfunktion gehört zu den nachstehenden Wertetabellen?

$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = \dots$	0,0039	0,0156	0,0625	0,25	1	4	16	64	256
$f(x) = \dots$	81	27	9	3	1	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123
$f(x) = \dots$	625	125	25	5	1	0,2	0,04	0,008	0,0016

Wie verändert sich der Graph, wenn die Funktion  $f(x) = b^x$  dahingehend verändert wird, dass der Funktionsterm wie folgt aussieht  $f(x) = a \cdot b^x + c$ ?

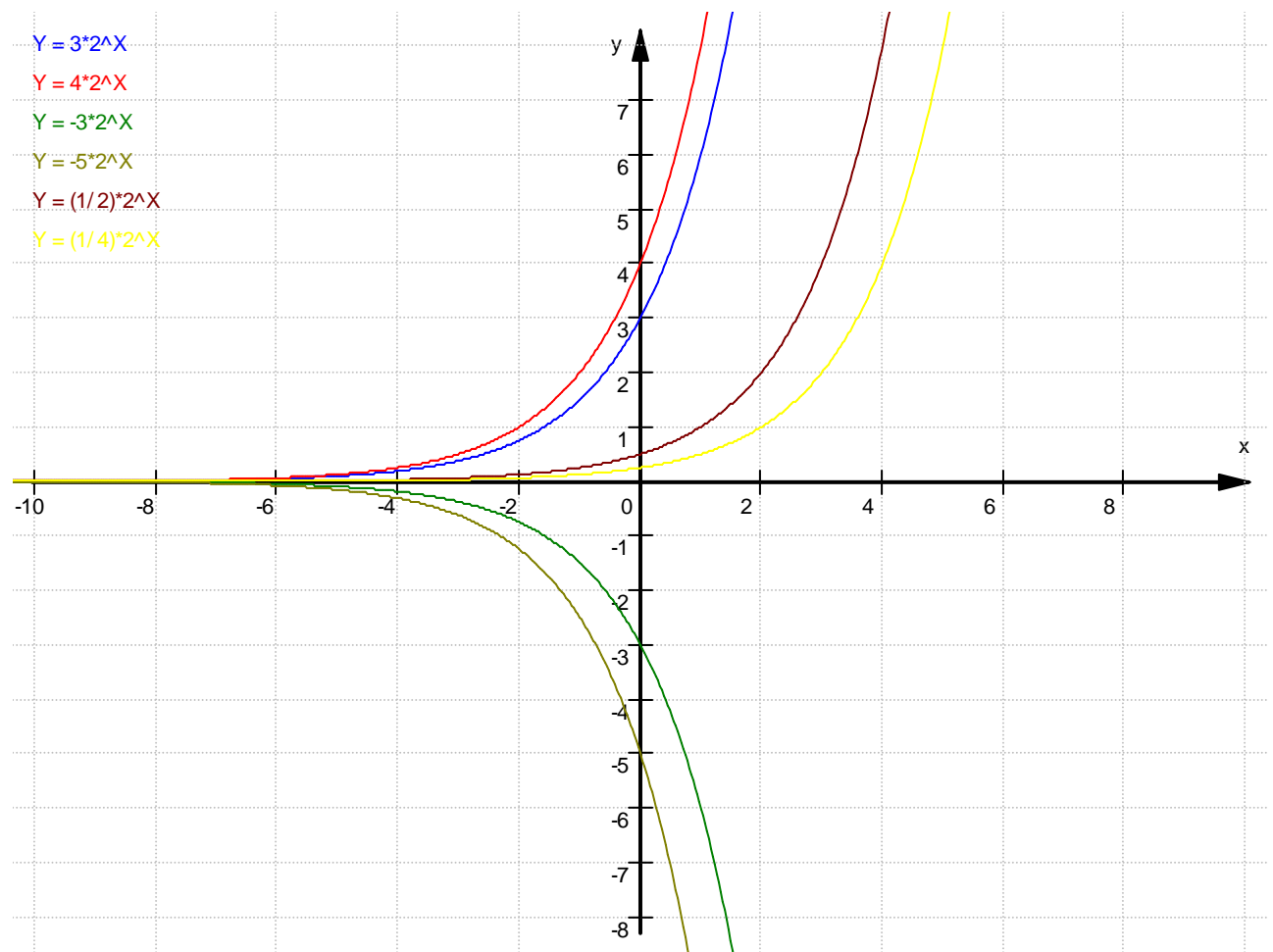
**Veränderung 1:     Hinzufügen einer Konstanten  $c$  , d.h.  $f(x) = b^x + c$**



Welchen Einfluss auf den Graphen der Funktion  $f$  hat die Konstante  $c$ ?

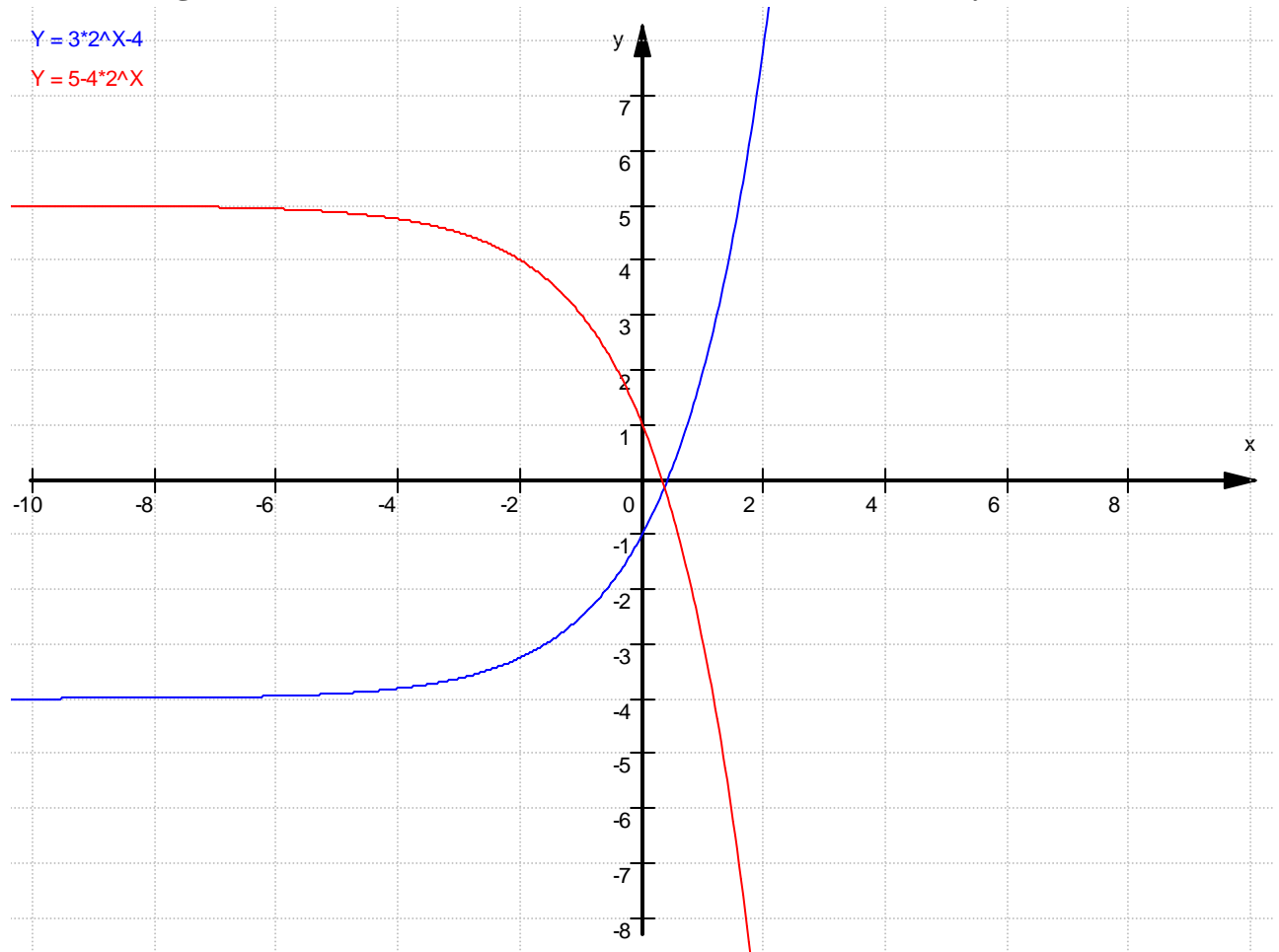
1. Wenn sie positiv ist
2. Wenn sie negativ ist?

**Veränderung 2: Einfügen eines Faktors  $a$ , d.h.  $f(x) = a \cdot b^x$**



Welchen Einfluss auf den Graphen der Funktion  $f$  hat der Faktor  $a$  ?

1. Wenn er positiv ist und größer als 1 ist?
2. Wenn er negativ ist und kleiner als -1 ist?
3. Wenn er Werte annimmt, die zwischen 0 und +1 liegen?
4. Wenn er Werte annimmt, die zwischen -1 und 0 liegen?

**Veränderung 3: Kombination von Faktor  $a$  und Konstante  $c$ , d.h.  $f(x) = a \cdot b^x + c$** 

Anwendungsbereiche der Exponentialfunktion:

1. Bevölkerungswachstum
2. Geldanlage
3. Kettenbriefe und ihre Konsequenzen
4. Zerfallsprozesse in der Umwelt (Physik, Chemie, Archäologie)

# Arbeitsblatt 1: Weltbevölkerung

Mitte 2006 lebten auf der Erde ca. 6,5 Milliarden Menschen und die Bevölkerungszahl steigt weiter. Die jährliche Wachstumsrate liegt bei ca. 1,2%

Hinweis:

Aktuelle Zahlen bzw. eine Weltbevölkerungsuhr findet man im Internet unter [www.weltbevoelkerung.de](http://www.weltbevoelkerung.de)

- a) Die Wissenschaft vom Zustand und der Entwicklung einer Bevölkerung (Demographie) erstellt auf der Basis dieser Zahlen Prognosen, d.h. man versucht vorherzusagen, wie die Bevölkerungszahlen sich bei gleich bleibender Wachstumsrate entwickeln werden. Erstelle eine Vorhersage für die Zahl der Weltbevölkerung im Jahr 2025 und im Jahr 2050
- b) Um wie viel Menschen wächst die Menschheit momentan jeden Tag? Um wie viele jede Sekunde?
- c) Die Volksrepublik China hatte im Jahr 2005 1.301.518.000 Einwohner. Das Bevölkerungswachstum beträgt ca. 0,6%. Trotz Geburtenkontrolle und Ein-Kind-Politik geht man davon aus, dass der Höhepunkt der Entwicklung erst 2030 erreicht wird. Wie viele Bewohner wird China dann voraussichtlich haben? Prognosen sagen voraus, dass China im Jahr 2050 wieder 1.322.435.000 Einwohner haben wird. Um welchen Prozentsatz ist die Bevölkerung dann zurückgegangen?
- d) Die Bevölkerungsentwicklung verläuft auf den einzelnen Kontinenten unterschiedlich. In der folgenden Tabelle sind einige demographische Daten für Afrika, Asien und Europa dargestellt.

	2006	Wachstumsrate
Afrika	924 Millionen	2,3%
Asien	3968 Millionen	1,2%
Europa	732 Millionen	-0,1%

- e) Ermittle auf Grundlage der Daten die voraussichtlichen Bevölkerungszahlen in den Jahren 2025 und 2050.
- f) Welche Ursachen könnte es für die unterschiedlichen Bevölkerungsentwicklungen geben?
- g) Angenommen, die Wachstumsrate sinkt in Afrika um einen Prozentpunkt. Wie verändern sich die Zahlen für 2025 und 2050. Schätze zuerst und rechne dann!

## Arbeitsblatt 2: Geldanlage

Hinweis:

Ein Kapital  $k_0$  wird zu einem Zinssatz  $p$  eine Anzahl Jahre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) angelegt. Das Kapital  $k_1$  ergibt sich aus dem Anfangskapital zuzüglich den Zinsen aus  $k_0$ , also

$$k_1 = k_0 + \frac{k_0 * p}{100} = k_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right). \text{ Das Kapital } k_2 \text{ ergibt aus dem Kapital } k_1 \text{ zuzüglich Zinsen,}$$

$$\text{also } k_2 = k_1 + \frac{k_1 * p}{100} = k_1 \left( 1 + \frac{p}{100} \right) = k_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right) * \left( 1 + \frac{p}{100} \right) = k_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

Analog ergibt sich ein Kapital nach  $n$  Jahren  $k_n = \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n$ . Setzt man  $q = \left( 1 + \frac{p}{100} \right)$ , so

nimmt die Formel folgendes Aussehen an:  $k_n = k_0 * q^n$

Werden die Zinsen nicht am Ende eines Jahres, sondern immer am Ende kleinerer (aber gleich bleibender) Zeiträume zum Kapital hinzugefügt, dann wird die Formel leicht verändert.

Betragen die gleich bleibenden Zeitschritte  $\frac{1}{m}$  Jahr und rechnen wir für diesen Zeitraum mit

dem Zinssatz  $P_{neu} = \frac{p}{m}$ , dann sieht die Formel wie folgt aus:  $k_n^* = k_0 \left( 1 + \frac{p}{m * 100} \right)^{mn}$

Beispiel: monatlich  $m = 12$ ; täglich  $m = 360$ ; usw.

$$\text{Zinssatz: } P = \frac{p}{12 * 100} \quad \text{Zinssatz: } P = \frac{p}{360 * 100}$$

- a) Auf welche Summe wächst ein Kapital von 500 €, das zu 5% fest angelegt wird in 10 Jahren an, wenn die Zinsen
1. jährlich
  2. halbjährlich
  3. vierteljährlich
  4. monatlich
  5. täglich zum Kapital hinzugefügt werden?
- Gibt es eine Erklärung für die unterschiedlichen Ergebnisse?
- b) Ein Kapital betrug vor 5 Jahren 180.000 €, heute ist es auf 250.000 € angewachsen. Wie groß war die jährliche Wachstumsrate, wenn gleichmäßiges Wachstum angenommen werden kann?
- c) Jemand legt 6.000 € zu 5% an und fügt
1. am Anfang
  2. am Ende
- jedes Jahres noch 500 € hinzu. Wie groß ist sein Kapital nach 8 Jahren?
- d) Jemand hat auf einer Bank ein Kapital von 80.000 € zu  $4\frac{1}{2}\%$  angelegt. Für seinen Lebensunterhalt entnimmt er am Anfang eines jeden Jahres 5.400 €. Wie groß ist sein Guthaben nach 10 Jahren?

## Arbeitsblatt 3: „Schneeballsysteme“

In einer Schulklasse ist ein Gerücht, über ein neues „Klassenpärchen im Umlauf. Schülerin A hat davon „aus gut unterrichteten Kreisen“ gehört und unter dem Siegel der Verschwiegenheit am darauf folgenden Tag an 2 „beste“ Freundinnen B und C weitererzählt. Trotz aller „Geheimhaltungschwüre“ tratscht jede Freundin dieses Geheimnis an jeweils 2 weitere „gute Freundinnen“ am nächsten Tag weiter.

- In der Schulklasse sind 32 SchülerInnen. Nach wie viel Tagen ist das Gerücht allen MitschülerInnen bekannt?
- An der Schule sind insgesamt ca. 1.800 Schüler. Nach wie viel Tagen ist das Gerücht in der Schule bekannt?
- Leider hat es das Klassenpärchen nur 6 Wochen (42 Tage) lang gegeben. Wenn die Ausbreitung des Gerüchts in gleicher Weise konsequent fortgesetzt worden wäre: Hätte in dieser Zeit dann schon die ganze Welt davon erfahren? (ca. 6 Milliarden Menschen)

- In einem Liebesbrief, der „zufällig“ gefunden wurde stand geschrieben, dass der Junge dem Mädchen den „Mond vom Himmel holen“ wolle und er dazu einen Papierberg bauen würde, den er aus einem einzigen Blatt Papier DIN A4 (Dicke ca. 1 mm) durch Falten (jeweils in der Mitte) konstruieren wolle. (d.h. das Blatt wird durch Falten jeweils doppelt so dick).

Wie oft hätte der Junge das Blatt falten müssen, um die Entfernung Erde – Mond (ca. 380.000 km) zurücklegen zu können?



- Der Legende nach (hier leicht verändert) soll das Schachspiel in Indien von einem Weisen für seinen Herrscher erfunden worden sein. Der Herrscher soll so begeistert gewesen sein, dass er dem Erfinder jeden Wunsch erfüllen wollte.

Möglichkeit 1: 100 Reiskörner auf das erste Feld und je 100 Reiskörner auf alle weiteren Felder des Schachbrettes

Möglichkeit 2: 1 Reiskorn auf das erste Feld, 2 Reiskörner auf das zweite, 4 Reiskörner auf das dritte, jeweils doppelt so viele Reiskörner auf das nächstfolgende Feld und immer so weiter bis zum 64. Feld

- Damit der Weise nicht noch einen anderen Wunsch äußern konnte, überlegte der Herrscher rasch für die erste Reihe (8 Felder), für welche der beiden Möglichkeiten er sich entscheiden sollte, um mit möglichst wenig Reiskörnern auszukommen. Zu welchem Ergebnis kam er?

- 1 Reiskorn hat ein Gewicht von 0,0003 kg. Wie viele Tonnen Reis liegen auf dem 64. Feld?

- Vergleiche dies mit dem jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch an Reis in Deutschland (Internetrecherche!)

- Zeige, dass für die Gesamtzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett die Formel gilt:

$$s_n = 2^n - 1 \quad (n \text{ ist Anzahl der Felder, } s \text{ ist Summe})$$

Vergleiche die Summe der Reiskörner auf dem Schachbrett mit der Weltproduktion an Reis (Internetrecherche)

## Arbeitsblatt 4: Zerfallsprozesse

In der Medizin werden zur Diagnose von z.B. Knochenbrüchen Röntgenstrahlen verwendet. Da diese in hohen Dosierungen jedoch schädliche Wirkungen auf den menschlichen Körper haben, werden Körperregionen, die nicht untersucht werden sollen durch Bleiplatten abgeschirmt. Für diese Bleiplatten gilt: Pro 1 mm Dicke nimmt die Röntgenstrahlung, die durchdringt, um ca. 5% ab.

- a) Wie viel Prozent der Röntgenstrahlung dringt bei einer 5 mm dicken Bleiplatte noch durch?
- b) Tim behauptet: „100 geteilt durch 5 sind 20. Das heißt, wenn die Bleiplatte 20 mm dick ist, kommt keinerlei Röntgenstrahlung mehr durch!“ Nimm zu Tims Aussage Stellung!
- c) Damit die Menschen nicht zuviel Röntgenstrahlung aufnehmen wird in immer mehr Fällen mittlerweile den Patienten eine leicht radioaktive Kontrastflüssigkeit verabreicht, die dann durch die entsprechenden Apparaturen auf Monitoren sichtbar gemacht werden kann. Von dem Medikament „ADOLOR“ werden bei einem erwachsenen Menschen pro Stunde 35% abgebaut. Ein zu untersuchender Patient bekommt von diesem Medikament 250 mg gespritzt.
  1. Bestimme den Abnahmefaktor
  2. Wie viel der verabreichten Menge ist nach 4 Stunden noch im Körper des Patienten vorhanden?
  3. Ist die Menge des Medikaments im Körper unter 20 mg gesunken, ist es nicht mehr auf den Monitoren sichtbar. Nach wie viel Stunden ist dies der Fall?
- d) Bei einem Experiment zum radioaktiven Zerfall einer Kontrastflüssigkeit misst man zu Beginn eine Masse von 400 mg. Im Fortgang des Experiments wird die verbleibende Masse alle 30 sec bestimmt.

Zeit $t$ in sec	0	30	60	90	120	150	180
Masse in (mg)	400	320	256	204,8	163,84	131,072	104,8576

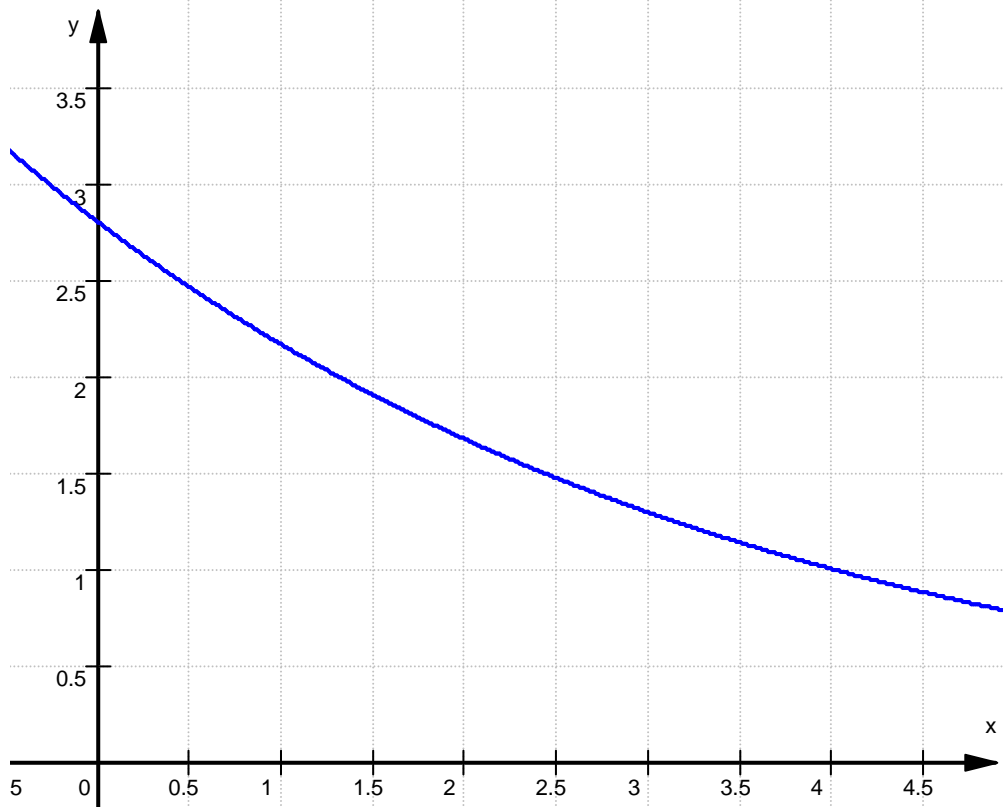
1. Begründe, dass man von einem exponentiellen Zerfallsprozess ausgehen kann. Gebe den Wachstumsfaktor  $a$  für den Zeitschritt 30 sec und die zugehörige Zerfallsfunktion an
  2. Bestimme neben der Zerfallsfunktion auch die Zerfallsfunktion zum Zeitschritt 1 sec
  3. Nach welcher Zeit ist das Präparat auf die Hälfte seiner ursprünglichen Ausgangsmenge zerfallen? (Halbwertszeit!)
- e) Cholera wird durch den Bazillus *Vibrio cholerae* hervorgerufen. Zu Beginn eines Experimentes wird eine Kolonie von 400 Bazillen in eine Nährlösung gebracht. Zwei Stunden später zählt man bereits 30.000. In diesem Stadium wird von einer exponentiellen Vermehrung der Bakterien ausgegangen
1. Bestimme die zugehörige Wachstumsfunktion zum Zeitschritt 2 Stunden
  2. Wie lautet die Wachstumskonstante und die Wachstumsfunktion zum Zeitschritt 1 h bzw. zum Zeitschritt 1 min? Wie viele Bakterien sind es nach 30 Minuten

## Arbeitsblatt 5: Bierschaumexperiment

Einem Besucher des Münchener Oktoberfestes fällt auf, dass die Bierschaumkrone eines Maßes Bier mit der Zeit abnimmt. Ihn interessiert bei seinen Beobachtungen, ob der Zerfall irgendeiner Gesetzmäßigkeit unterliegt. Um dem „Geheimnis“ des Bierschaumzerfalls auf die Spur zu kommen notiert er in regelmäßigen Abständen die Höhe des Bierschaumes. (siehe Tabelle). Zu Beginn seiner Beobachtungen befindet sich der Bierschaum noch 2,8 cm oberhalb der „Eichmarke des Bierglases. Nach 5 Minuten kann er noch 0,77 cm Schaum messen.

Zeit $t$ in min	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Höhe $h$ in cm	2,8	2,46	2,16	1,90	1,67	1,47	1,29	1,13	1	0,87	0,77

- a) Trage die Messungen in ein Koordinatensystem ein und entscheide um welche Art von Zerfall (linear, quadratisch, exponentiell, usw.) es sich hierbei handelt.

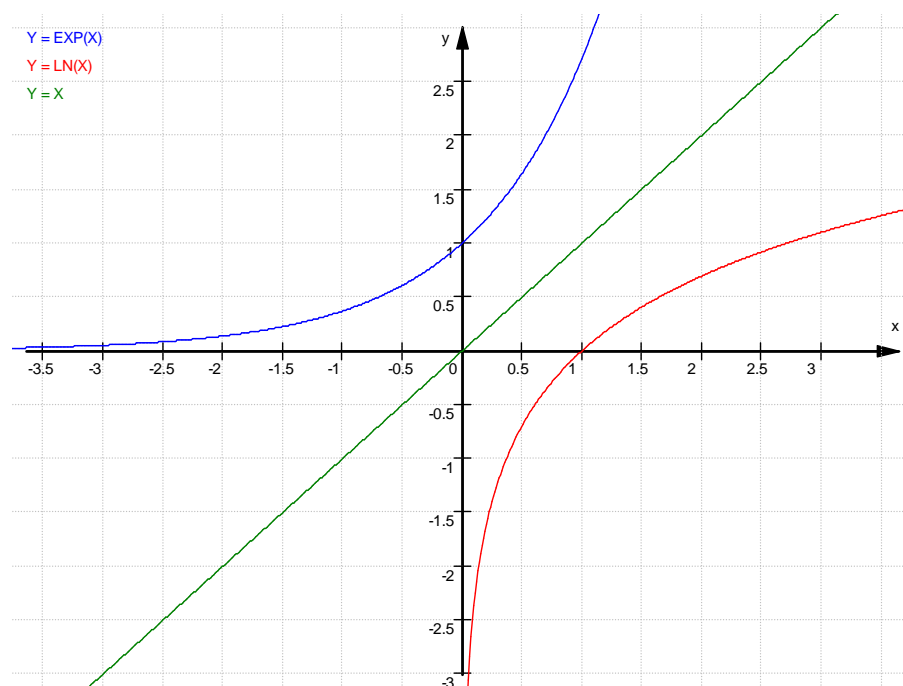
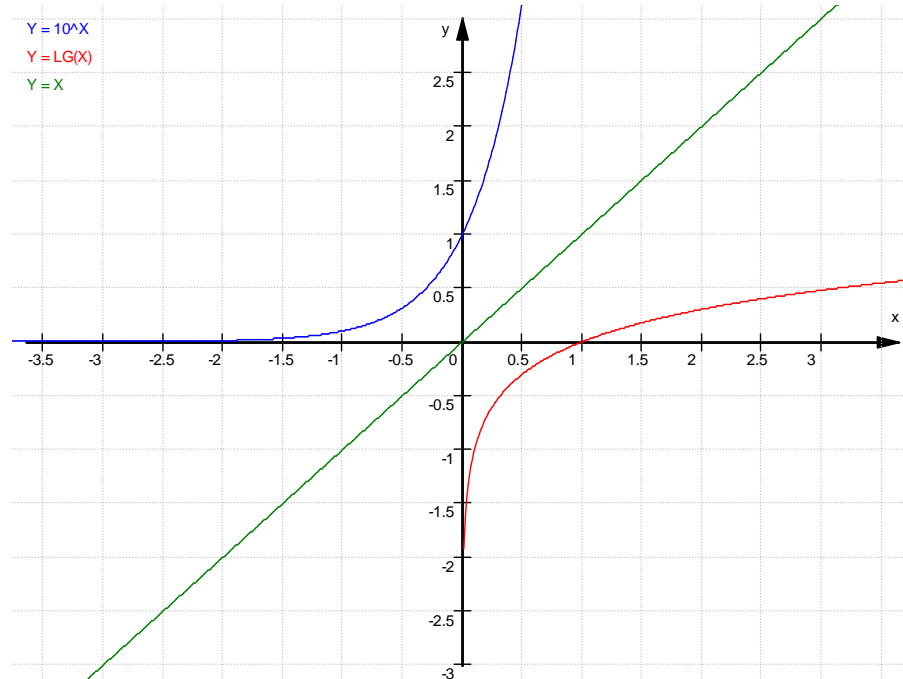


- b) Versuche die erhaltenen Messwerte durch eine Funktion, der Form  $f(x) = ae^{\lambda \cdot x}$  zu beschreiben
- c) Lässt sich der Zeitpunkt berechnen an dem nur noch 0,1 cm Bierschaum vorhanden ist?
- d) Lässt sich ermitteln, wann der Bierschaum exakt auf die Hälfte (ein Viertel, ein Achtel) seiner ursprünglichen Anfangshöhe gesunken ist.

# Die Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h. es wird aus  $y = 10^x$  die Funktion  $x = 10^y$ .

Geometrisch betrachtet bedeutet dies, dass die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $y = x$  entsteht.



Eigenschaften der Logarithmusfunktion:

1. Der Scharpunkt der logarithmischen Kurvenschar hat die Koordinaten  $S(1/0)$
2. Die Logarithmen aller Zahlen  $>1$  sind positiv
3. Die Logarithmen aller Zahlen zwischen 0 und 1 sind negativ
4. Mit kleiner werdende  $x$ -Werte  $x \rightarrow 0$  ist die negative  $y$ -Achse Asymptote
5. Für Zahlen  $\leq 0$  existieren keine reellen Logarithmen

# Arbeitsblatt: Logarithmus



## Der Logarithmus



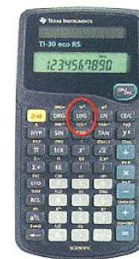
Es gibt immer noch Gebiete auf der Erde, in denen das Internet noch nicht verbreitet ist. Tina liest von einer Insel in der Südsee, die erst im Jahr 2000 ihren ersten Internetzugang bekommen hat. Der König war damals der erste Internetsurfer, dann einen Monat lang seine zehnköpfige Familie, und auch danach verzehnfachte sich monatlich die Zahl der Internetsurfer auf der Insel.

- a) Die Hauptstadt dieser Südseeinsel hat 10 000 Einwohner.  
Wann sind diese – bei gleich bleibender Entwicklung – alle online?  
Um diese Frage zu beantworten, ist die Gleichung  $10^x = \dots$  zu lösen, du suchst also die Zahl  $x$ , mit der man die Basis 10 potenzieren muss, um 10 000 zu erhalten.
- b) Die Lösung dieser Gleichung ist  $\dots$ , da  $10^{\square} = 10000$ ,  
d. h. in  $\dots$  sind alle Bewohner der Hauptstadt online.
- c) Tina liest weiter, dass der König so begeistert vom Internet ist, dass er nicht nur die Hauptstadt, sondern die gesamte Insel mit Hotspots versorgen will, sodass alle Bewohner der Insel im Internet surfen können. Die gesamte Insel hat ca. 32 000 Einwohner. Wann werden diese alle online sein?  
Jetzt ist die Gleichung  $10^{\square} = \dots$  zu lösen, das heißt, du suchst die Zahl  $x$ , mit der man die Basis 10 potenzieren muss, um 32 000 zu erhalten. Du suchst also den  $\log \dots$ .
- d) Die Lösung ist nicht so einfach zu bestimmen wie in Aufgabe a), aber der Taschenrechner kann dir helfen. Mit ihm kannst du alle Logarithmen näherungsweise berechnen.

Diese Zahl  $x$  nennt man den **Logarithmus von 10 000 zur Basis 10**.  
Man schreibt  $\log_{10} 10\,000 = x$

Um den  $\log_{10} 32\,000$  zu berechnen, musst du  $\log 32\,000$  eingeben und du erhältst als Lösung  $\dots$ , also  $\dots$  Monate.

**Hinweis:** Wenn du einen älteren TR hast, kann es sein, dass du die Tastenfolge umkehren musst, nämlich: 32 000  $\log$ . Es kann auch sein, dass dein TR die Taste  $\lg$  statt  $\log$  hat.



**MEMO**

Mit dem **Logarithmus** von  $a$  zur **Basis  $b$**  – kurz  $\log_b a$  – wird die Zahl bezeichnet, mit der man eine Basis  $b$  potenzieren muss, um  $a$  zu erhalten ( $a$  und  $b$  sind positive Zahlen):

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

$$\text{Beispiele: } \log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100 ; \quad \log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

## Übungen zum Logarithmus

Fülle in der nachstehenden Tabelle die Lücken aus und untersuche die erhaltenen Ergebnisse auf mögliche Gesetzmäßigkeiten.

Benutze bei den Berechnungen die *lg-Taste* bzw. die *log-Taste*, (nicht die *ln-Taste*).

Numerus	Logarithmus		Numerus	Logarithmus
0,035				0,0170543
0,35				-0,170543
3,5				1,170543
35				0,170543
350				0,170543-1
3500				0,170543-2
35000				0,170543-3

Alle positiven Zahlen  $u, v$  lassen sich in der Form  $u = a^x$  und  $v = a^y$  schreiben (mit Basis  $a > 0$ )

Dann gilt:  $u * v = a^x * a^y = a^{x+y}$  (Potenzgesetz)

Es gilt weiterhin:  $x = {}^a \log u$  und  $y = {}^a \log v$ , also:  ${}^a \log(u * v) = x + y$

Kurz:  $\log(u * v) = \log u + \log v$

Analog:  $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$

Außerdem:  $\log(u^n) = n * \log u$       Oder:  $\log\left(u^{\frac{1}{n}}\right) = \log(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log u$

Zusammenfassung:

**Das Rechnen mit Logarithmen ist ein Rechnen mit Hochzahlen zur gleichen Basis.**

**Dadurch wird**

- **das Multiplizieren und Dividieren auf das Addieren und Subtrahieren**
- **das Potenzieren und Radizieren auf das Multiplizieren und Dividieren reduziert**

# Übungen zum Logarithmus

Die folgenden Terme sind zu logarithmieren:

Gegebener Term	Logarithmischer Term		Gesuchter Term	Logarithmischer Term
$x * y * z$				$\lg a - \lg b$
$\frac{x * y}{z}$				$\frac{1}{2} \lg a - \frac{1}{3} \lg b$
$r * (s + t)$				$2 \lg t - \lg h + \lg f$
$\frac{1}{x * y}$				$2 \lg(a + b)$
$x^2 * y$				$3 \lg c + 4 \lg b - 2 \lg c$
$\sqrt[6]{x * t^2}$				$\frac{1}{2} \lg(a^2 - b^2) - \lg(a + b)$
$\frac{x^2 * y^3}{z}$				$\lg 6 + \lg 12 - \lg 4$
$7\sqrt{5x}$				$5 \lg 2 - 3 \lg 4$
$3p\sqrt[8]{a^5}$				$1 - \lg 2$
$\sqrt[4]{z}$				$\lg 2 + 2$

## 87. Exponentengleichungen

Eine Bestimmungsgleichung, in der die Unbekannte im Exponenten vorkommt, nennen wir Exponentengleichung.

**Beispiele:**

a)  $4^{2x} = 16 \cdot 4^{x+1}$

Lösung:

$$4^{2x} = 4^2 \cdot 4^{x+1}$$

$$4^{2x} = 4^{2+x+1}$$

Durch Exponentenvergleich folgt:

$$2x = 2 + x + 1$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

b)  $5^x = 12$ , d. h. bestimme  $x = {}^5\log 12$ .

Lösung:

Man logarithmiert beide Seiten der Gleichung:

$$x \lg 5 = \lg 12$$

$$x = \frac{\lg 12}{\lg 5}$$

$$x = \frac{1,0792}{0,6990}$$

$$\underline{\underline{x \approx 1,54}}$$

c)  $8^{x-1} = 7 \cdot 5^x$

Lösung:

Man logarithmiert beide Seiten der Gleichung:

$$(x-1) \lg 8 = \lg 7 + x \lg 5$$

$$x \lg 8 - x \lg 5 = \lg 7 + \lg 8$$

$$x (\lg 8 - \lg 5) = \lg 7 + \lg 8$$

$$x = \frac{\lg 7 + \lg 8}{\lg 8 - \lg 5}$$

$$x \approx 8,57$$

$$\underline{\underline{x \approx 8,57}}$$

d)  $3 \cdot 2^{2x} - 15 \cdot 2^x = 198$

Lösung:

Man setzt  $2^x = z$ . Dann ist:

$$3z^2 - 15z = 198$$

$$z_1 = 2,5 + \sqrt{6,25 + 66} = +11$$

$$z_2 = 2,5 - \sqrt{72,25} = -6$$

$$z_1: 2^x = 11; \quad x \lg 2 = \lg 11$$

$$x = \frac{\lg 11}{\lg 2}; \quad \underline{\underline{x = 3,46}}$$

$z_2: 2^x = -6$ . Da wir negative Zahlen nicht logarithmieren können, kommt  $z_2 = -6$  nicht in Betracht für die Lösung der Aufgabe.

### Übungen:

1. Wann ist durch den Vergleich der Exponenten eine Exponentengleichung zu lösen?

2. Löse ohne Logarithmieren durch Exponentvergleich:

a)  $3^x = 81$

b)  $3^{3x-4} = 729$

c)  $16^x = 32$

d)  $12^{2x-1} = 1$

e)  $27 \cdot 3^x = 3^{2x-1}$

f)  $a^{3x} = a^{x+5}$

g)  $8^{-x} = 32$

h)  $27^x = \frac{1}{9}$

i)  $a^2 \cdot a^{-x} = a^x \cdot a^{3x-7}$

k)  $36^{\frac{1}{2}} \cdot 6^x = 6^4$

l)  $a^x \cdot a^{-1} = a^{\frac{x}{2}}$

m)  $5^x \cdot 5^{\frac{6}{x}} = 5^{2,5x}$

n)  $2^{4x-3} \cdot 4^{2x+1} = 8^x$

o)  $3^{3x+1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1} = 27^x$

p)  $a^{2x} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^{4x+5} = a^{7x}$

3. a)  $2^x = 5$

b)  $15^x = 8$

c)  $8^{\frac{1}{x}} = 0,5$

d)  $7^{x-2} = 3000$

e)  $1,75^x = 18$

f)  $25 \cdot 4,36^x = 340$

g)  $1,002^x = 2$

h)  $a^x = a \cdot b^x$

i)  $3 \cdot 5^{2x} = 7^{x+4}$

k)  $5 \cdot 8^{x+1} = 16^{x-1}$

l)  $8 \cdot 12^{x-1} = 7 \cdot 10^{x-1}$

m)  $17 \cdot 3^{x-5} = 4 \cdot 9^{2x}$

4. a)  $4^{\frac{1}{x}} = 5^{\frac{1}{2}}$

b)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = 7^{\frac{1}{3}}$

c)  $\sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

d)  $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

5. Wie heißt der kleinste ganzzahlige Exponent  $x$ , für den die folgenden Potenzwerte größer als 100000 sind?

a)  $\left(\frac{7}{6}\right)^x$

b)  $\left(\frac{8}{7}\right)^x$

c)  $\left(\frac{9}{8}\right)^x$

d)  $\left(\frac{10}{9}\right)^x$

e)  $\left(\frac{9}{5}\right)^x$

f)  $\left(\frac{11}{11}\right)^x$

6. Wie heißt der kleinste ganzzahlige Exponent  $x$ , für den die folgenden Potenzwerte kleiner als 0,00001 sind?

a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^x$

b)  $\left(\frac{4}{5}\right)^x$

c)  $\left(\frac{5}{6}\right)^x$

d)  $\left(\frac{6}{7}\right)^x$

e)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

f)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

7. a)  $2^x = \sqrt[3]{512}$

b)  $0,25^x = \sqrt[3]{0,707}$

c)  $\frac{3^x}{\sqrt[3]{3}} = 1869$

d)  $\frac{a^x}{\sqrt[3]{a}} = a$

e)  $x^{\lg x} = 1,8$

f)  $x^{\lg x} = a$

g)  $3^{2x} - 4 \cdot 3^x = 12$

h)  $4^{2x} - 5 \cdot 4^x = 3776$

i)  $4^x + 6 \cdot 2^x = 16$

k)  $9^x - 8 \cdot 3^x - 20 = 0$

8. Berechne a)  ${}^3\log 5$  b)  ${}^5\log 8$  c)  ${}^6\log 8,456$  d)  ${}^{12}\log 7,043$  e)  ${}^2\log 0,831$ .

## Rechnen, wie in „alten Zeiten“

Benutze den Taschenrechner nur dafür, um die benötigten Logarithmen auf 4 Kommastellen exakt nachzuschlagen. Alle anderen notwendigen Rechenschritte werden „zu Fuß“ im „logarithmischen Raster“ durchgeführt.

Beispiel 1: Löse  $x = 45,36 * 1,39 * 249,3$       Ergebnis mit TR:      15718,46472

Numerus		Logarithmus	
	45,36	1,65667	
*	1,39	0,14301	+
*	249,3	2,39672	+
	15718,098	← 4,1964	

Beispiel 2:  $x = 643,3 : 0,425$       Ergebnis mit TR:      1513,64705

Numerus		Logarithmus	
	643,3	2,80841	0
	0,425	: -	0,62838 - 1
			2,18003 +1
	1513,6658	←	3,18003

Beispiel 3:  $x = 14,72^3$       Ergebnis mit TR:      216,6784

Numerus		Logarithmus	
	14,72	1,16790	
	14,72	↑ <sup>2</sup>	1,16790 * 2
	216,67060	←	2,33580

Beispiel 4:  $x = \sqrt[3]{0,0694}$       Ergebnis mit TR:      0,410947639

Numerus		Logarithmus	
	0,0694	0,84135	- 2
		1,84135	- 3
	$\sqrt[3]{0,0694}$	↑ <sup>1/3</sup>	0,613786 - 1
	0,410947	←	

## Übungsblatt zum „logarithmischen Kreuz“

Löse die nachstehenden Aufgaben und achte darauf, ob bei allen Aufgaben im logarithmischen Raster gerechnet werden darf, oder ob gegebenenfalls die logarithmische Rechnung an der einen oder anderen Stelle unterbrochen werden muss.

$x = 135 * 17,5$	$x = 23,71 * 0,002362$	$x = 0,07401 / 0,41379$
$x = \frac{25,38 * 11,57}{56,09}$	$x = \frac{53429 * 0,36784}{0,48621 * 68,356}$	$x = 9,27^3$
$x = \frac{4 * 0,6951}{5} + \frac{8,76 * 0,9843}{8}$	$x = \frac{1}{48,7 * 0,1245}$	$x = \left( \frac{44,89 * 8,763}{954,6} \right)^4$
$x = \frac{8,451^2 * \sqrt{0,8476}}{\sqrt{21,43} * 0,1458}$	$x = \frac{\sqrt[3]{138,4 * 2,64} - \sqrt{26,43}}{18,26 * 0,934^2}$	$x = \sqrt[5]{\frac{1}{4,361 * 0,0843}}$
$x = \sqrt[3]{48,26 * \sqrt{29,58}}$	$x = \frac{\sqrt[3]{2,461^2 - \sqrt{79,24}}}{36,41 * 0,0264 - 1,987^2}$	$x = \frac{3,721^2 - 8,43 * \sqrt[5]{-138,9}}{\sqrt[3]{6,221^2} * \sqrt{95,28}}$

Eine mögliche Klausur könnte wie folgt aussehen:  
Klausurentwurf

November 2008

**Aufgabe 1:**

43 Punkte

Rechne die folgenden Aufgaben im „logarithmischen Kreuz“ und bestimme die hierzu notwendigen Logarithmen und Numeri auf 5-Dezimalstellen mit Hilfe des Taschenrechners.

Führe zu jeder Aufgabe eine Überschlagsrechnung durch!

a) 5

b) 6

a)  $\sqrt{0,0625} =$

b)  $\left(\frac{74,26}{50,32}\right)^2 =$

c) 9

d) 8

c)  $\frac{0,827^3}{0,5278^2} =$

d)  $\sqrt{25,36^2 - 14,79^2} =$

e) 9

f) 6

e)  $\frac{4,836^3}{\sqrt[3]{246,5 - \sqrt{82,36}}} =$

f)  $\sqrt[5]{28,31 - \sqrt{624,3}} =$

**Aufgabe 2:**

9 Punkte

Löse die nachstehenden Exponentialgleichungen

a) 4

b) 5

a)  $4^{\frac{1}{x}} = 5^2$

b)  $5 * 6^{2x-1} = 13^x$

**Aufgabe 3:**

8 Punkte

Wie heißt der kleinste ganzzahlige Exponent  $x$ , für den die folgende Potenz größer als 1000 ist?

$$\left(\frac{7}{6}\right)^x$$

**Aufgabe 4:**

7 Punkte

Wie lautet die Lösung der Exponentialgleichung?

$$x^{\lg x} = 2$$

**Aufgabe 5:**

8 Punkte

Ein Kapital in Höhe von 2.500 € wird 4 Jahre mit 3,9% fest angelegt. Auf welchen Betrag ist das Kapital angewachsen?

Wie und in welcher Form ändert sich der Endbetrag, wenn für die beiden ersten Jahre 1,5% und in den beiden letzten Jahre 5,5% gewährt werden?

**Aufgabe 6:**

8 Punkte

Der Graph einer Exponentialfunktion  $f$  mit  $f(x) = c * a^x$  geht durch die Punkte  $P(1/1)$  und  $Q(2/2)$

Wie lautet die Funktionsgleichung?

Verläuft die Funktion durch den Punkt  $R(3/4)$  ?

**Aufgabe 7:**

9 Punkte

Eine Botschaft wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% von einem Berichtersatter zum nächsten Berichterstatter weitergegeben. Nach dem wievielten Berichterstatter ist der Wahrheitsgehalt unter 50% gesunken?

**Summe: 92 Punkte**

# Lösungen zum Klausurentwurf

November 2008

## Aufgabe 1:

Rechne die folgenden Aufgaben im „logarithmischen Kreuz“ und bestimme die hierzu notwendigen Logarithmen und Numeri auf 5-Dezimalstellen mit Hilfe des Taschenrechners.

Führe zu jeder Aufgabe eine Überschlagsrechnung durch!

**5 Punkte** a)  $\sqrt{0,0625}$

Überschlag:  $\sqrt{\frac{625}{10000}} = 0,25$

Num	Log
0,0625	0,79588 - 2
	(0,79588 - 2):2
<b>0,24999</b>	0,39794 - 1

**6 Punkte** b)  $\left(\frac{74,26}{50,32}\right)^2 =$

Überschlag:  $\left(\frac{75}{50}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$

Num	log
74,26	1,87075
50,32	-1,70174
	0,16901 * 2
<b>2,17781</b>	0,33802

**9 Punkte** c)  $\frac{0,827^3}{0,5278^2}$

Überschlag:  $\frac{1^3}{0,5^2} = \frac{1}{0,25} = 4$

Num	Log
0,827 <sup>3</sup>	(0,917505 - 1) * 3
	2,75251 - 3
	0,75251 - 1
0,5278 <sup>2</sup>	(0,72246 - 1) * 2
	1,44492 - 2
	-(0,44492 - 1)
<b>2,03043</b>	0,30759

**8 Punkte** d)  $\sqrt{25,36^2 - 14,79^2} =$

Überschlag:  $\sqrt{625 - 225} = 20$

Num	Log
25,36 <sup>2</sup>	1,40414 * 2
643,10220	2,80828
14,79 <sup>2</sup>	1,16996 * 2
218,73586	2,33992
$\sqrt{424,36634}$	2,62774 : 2
<b>20,60013</b>	1,31387

**9 Punkte** e)  $\frac{4,836^3}{\sqrt[3]{246,5} - \sqrt{82,36}} =$

Überschlag:  $\frac{5^3}{\sqrt[3]{216} - \sqrt{81}} = \frac{125}{6 - 9} = -42$

Num	Log
4,836 <sup>3</sup>	0,68448 * 3
	2,05344
$\sqrt[3]{246,5}$	2,39181 : 3
6,27003	0,79727
$\sqrt{82,36}$	1,91571 : 2

9,07517	0,95785
-2,80514	0,44795
<b>-40,31716</b>	1,60549

**6 Punkte**

f)  $\sqrt[5]{28,31 - \sqrt{624,3}} =$

Überschlag:  $\sqrt[5]{28 - 25} = 1,2$ 

Num	Log
$\sqrt{624,3}$	2,79539:2
24,98590	1,397695
$\sqrt[5]{28,31 - 24,9859}$	0,52167:5
$\sqrt[5]{3,3241}$	
<b>1,27155</b>	0,10433

**Aufgabe 2:**

Löse die nachstehenden Exponentialgleichungen

$$4^x = 5^2$$

$$5 * 6^{2x-1} = 13^x$$

**9 Punkte**

a)  $\frac{1}{x} \lg 4 = 2 \lg 5$

$$\lg 5 + (2x - 1) * \lg 6 = x \lg 13$$

b)  $2x \lg 6 - x \lg 13 = \lg 6 - \lg 5$

$$x = \frac{\lg 4}{2 \lg 5}$$

$$x = \frac{\lg 6 - \lg 5}{2 \lg 6 - \lg 13}$$

**Aufgabe 3:**Wie heißt der kleinste ganzzahlige Exponent  $x$ , für den die Potenz $\left(\frac{7}{6}\right)^x$  größer als 1000 ist?**8 Punkte**

$$\left(\frac{7}{6}\right)^x = 1000 \Rightarrow x \lg \frac{7}{6} = \lg 1000 \Rightarrow x = \frac{\lg 1000}{\lg \frac{7}{6}} = 44,8 \Rightarrow x = 45$$

**Aufgabe 4:**Wie lautet die Lösung der Exponentialgleichung  $x^{\lg x} = 2$ ?**7 Punkte**

$$\lg x * \lg x = \lg 2 \Rightarrow \lg x = \sqrt{\lg 2} = 0,54866 \Rightarrow x = 3,53721$$

**Aufgabe 5:**

Ein Kapital von 2.500 € wird 4 Jahre mit 3,5% festangelegt.

Auf welchen Betrag ist das Kapital angewachsen?

4

$$k_4 = 2500 * 1,035^4 = 2500 * 1,14752 = 2868,807 = 2868,81 \text{ €}$$

Nach 4 Jahren hat er 2868,81 €

Wie und in welcher Form ändert sich der Endbetrag, wenn für die beiden ersten Jahre 1,5% und in den beiden letzten Jahre 5,5% gewährt werden?

4

**8 Punkte**

$$k_2 = 2500 * 1,035^2 = 2500 * 1,071225 = 2678,0625$$

$$k_4 = k_2 * 1,055^2 = 2678,0625 * 1,113025 = 2980,7505$$

Das Endkapital beträgt dann 2980,75 €

**Aufgabe 6:**Der Graph einer Exponentialfunktion  $f$  mit  $f(x) = c * a^x$  geht durch die Punkte  $P(1/1)$  und  $Q(2/2)$

- 4 a) Wie lautet die Funktionsgleichung?  

$$\begin{cases} f(1) = 1 = c * a \\ f(2) = 2 = c * a^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{a^2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} * 2^x$$
- 4 b) Verläuft die Funktion durch den Punkt  $R(3/4)$   
 $f(3) = \frac{1}{2} * 2^3 = \frac{1}{2} * 8 = 4$  Die Funktion geht durch  $R$
- 8 Punkte**

**Aufgabe 7:**

Eine Botschaft wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% von einem Berichterstatter zum nächsten Berichterstatter weitergegeben.

- 5 a) Nach dem wievielten Berichterstatter ist der Wahrheitsgehalt unter 50% gesunken?  
 $w(n) = 0,97^n \Rightarrow 0,5 = 0,97^x \Rightarrow \lg 0,5 = x * \lg 0,97$   
 $x = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,97} = \frac{-0,301029}{-0,0132282} = +22,75 \Rightarrow 23$
- 4 *Probe:*  $0,97^{23} = 0,496$
- b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nach dem 20. Berichterstatter?  
 $w(20) = 0,97^{20} = 0,54379 \Rightarrow 54,38\%$
- 9 Punkte**

<b>Aufgabe 1:</b>	a)	<b>5</b>
	b)	<b>6</b>
	c)	<b>9</b>
	d)	<b>8</b>
	e)	<b>9</b>
	f)	<b>6</b>
<b>Aufgabe 2:</b>		<b>9</b>
<b>Aufgabe 3:</b>		<b>8</b>
<b>Aufgabe 4:</b>		<b>7</b>
<b>Aufgabe 5:</b>		<b>8</b>
<b>Aufgabe 6:</b>		<b>8</b>
<b>Aufgabe 7:</b>		<b>9</b>
<b>Summe</b>		<b>92</b>

## Klausur 2

17.12.2008

**Aufgabe 1:** Berechne:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{3^a}{3^2} = & \text{b)} \quad 4^2 * \sqrt{4^3} = & \text{c)} \quad a^{-1} * a^{\frac{2}{3}} = \\ \text{d)} & \frac{15x^2y^{-3}}{16a^{-2}b^{-2}} * \frac{8a^{-3}b^2}{27x^3y^2} = & \text{e)} \quad (6x^{-2} - 4x^{-4} + 5x^3) * 2x^{-6} = \end{array}$$

**Aufgabe 2:** Logarithmiere die nachfolgenden Terme:

$$\text{a)} \quad \lg\left(\frac{a^2 * b^3}{c}\right) = \quad \text{b)} \quad \lg\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\right) =$$

**Aufgabe 3:** Löse die nachstehenden Exponentialgleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad 4^{\frac{1}{x}} = 5^2 & \text{b)} \quad 5 * 6^{2x-1} = 13^x \\ \text{c)} \quad x^{\lg x} = 2 & \text{d)} \quad 2^{2x} + 6 * 2^x = 16 \end{array}$$

**Aufgabe 4:** Wie heißt der kleinste ganzzahlige Exponent  $x$ , für den die Potenz

$$\left(\frac{7}{6}\right)^x \text{ größer als 1000 ist?}$$

**Aufgabe 5:** Welche Exponentialfunktion  $f$  mit  $f(x) = a * b^x$  verläuft durch die Punkte  $A(-1/2)$  und  $B(2/54)$ ?

**Aufgabe 6:** Ein Kapital von 1250 € wird mit 4,5% verzinst und 3 Jahre bei der Bank deponiert. Während dieser Zeit werden keine Abhebungen auf dem Sparkonto vorgenommen. Auf welchen Betrag ist das ursprüngliche Kapital nach drei Jahren angewachsen?

**Aufgabe 7:** A hat an B zwei Kapitalien von 2.750 € und 3.420 € zu verschiedenen Zinssätzen ausgeliehen und erhält jährlich 281 € Zinsen. Der Vereinfachung wegen bietet er B an, dass er ihm beide Kapitalien zu dem Mittelwert der bisherigen Zinssätze verzinsen wolle. B nimmt diesen Vorschlag an, da er auf diese Weise jährlich 3,35 € weniger zu zahlen hat. Welchen Wert hatten die Zinssätze?

**Zusatzaufgabe:** Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Summe 10 beträgt. Durch Umstellen der Ziffern erhält man eine neue Zahl. Multipliziert man beide Zahlen miteinander, so erhält man 2944. Wie heißt die Zahl?

